

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМ НАДЕЖНОСТИ И КАЧЕСТВА

FUNDAMENTALS OF RELIABILITY ISSUES AND QUALITY

УДК 517.98: 519.2: 621.039

DOI 10.21685/2307-4205-2019-3-1

В. А. Острейковский, Е. Н. Шевченко

О РОЛИ ОПЕРАТОРА ЭНТРОПИИ ПРИ ОЦЕНКЕ И АНАЛИЗЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

V. A. Ostreykovsky, E. N. Shevchenko

ON THE ROLE OF THE ENTROPY OPERATOR WHEN ESTIMATING AND ANALYSIS OF THE INDICATORS OF LONGNESS OF COMPLEX TECHNICAL DYNAMIC SYSTEMS

Аннотация. Актуальность и цель. В связи с современными воззрениями вопросы оценки асимметрии времени на показатели долговечности оборудования структурно и функционально сложных технических систем (СФСС) относятся к первоначальному фундаментальному понятию науки, в рамках которого решение поднимаемой проблемы является чрезвычайно актуальной. Поэтому целью предлагаемой статьи является анализ влияния роли оператора энтропии на показатели долговечности СФСС. **Материалы и методы.** Так как традиционные детерминистические и вероятностные математические методы, основанные на теориях прочности и математической статистики, не учитывают эффекта асимметрии времени в модусах «прошлое–настоящее–будущее», то в данной статье используется аппарат теории операторов современного функционального анализа. **Результаты и выводы.** На базе второго закона термодинамики рекомендуется применение математического аппарата для учета связи асимметрии времени в моделях оценки показателей долговечности оборудования СФСС. Показана эффективность использования функций Ляпунова при

Abstract. *Background.* In connection with modern views, the evaluation of time asymmetry on equipment durability indicators of structurally and functionally complex technical systems (SFCS) are related to the primitive fundamental concept of science, within which the solution of the problem being raised is extremely important. Therefore, the purpose of the proposed article is to analyze the influence of the role of the entropy operator on the durability indices of the SFCS. *Materials and methods.* Since traditional deterministic and probabilistic mathematical methods based on theories of strength and mathematical statistics do not take into account the effect of time asymmetry in the “past-present-future” modes, this article uses the apparatus of the theory of modern functional analysis operators. *Results and conclusions.* On the basis of the second law of thermodynamics, it is recommended to use a mathematical apparatus to account for the connection of the time asymmetry in models for estimating indicators of the durability of SFSS equipment. The efficiency of using Lyapunov functions when applying the entropy operator M in problems of assessing resource characteristics and state at various stages of the life cycle

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проекты № 17-01-00244, №18-07-00391, № 18-47-860007).

применении оператора энтропии M в задачах оценки ресурсных характеристик и состояния на различных этапах жизненного цикла изделий сложных технических комплексов. В общем виде разработана методика учета оператора энтропии и функций Ляпунова в задачах оценки показателей долговечности оборудования СФСС.

Ключевые слова: оператор энтропии, функции Ляпунова, необратимость, асимметрия времени.

of products of complex technical complexes is shown. In general, a method has been developed for accounting for the entropy operator and Lyapunov functions in problems of estimating the durability of the SFCS equipment.

Keywords: entropy operator, Lyapunov functions, irreversibility, time asymmetry.

Введение

С появлением во второй половине XX в. структурно и функционально сложных систем (СФСС) длительного использования, весьма дорогостоящих и выполняющих критически важные функции, проблема обеспечения их высокой надежности, безопасности и эффективности приобрела первостепенное значение. К таким системам прежде всего следует отнести авиационные и ракетно-космические комплексы, транспорт, объекты обычной и ядерной энергетики, химической промышленности, системы добычи, транспортировки и переработки нефтегазовой отрасли. Поэтому решение проблемы долговечности сложных динамических систем носит межотраслевой характер.

Здесь также нужно особо подчеркнуть, что у приведенных выше систем ресурс и срок службы может составлять 30–50 и более лет, и, следовательно, очень важным фактором их применения по назначению является значение в данный момент величины остаточного ресурса. А это приводит к необходимости оценивать состояние оборудования СФСС в модусах времени «прошлое–настоящее–будущее». Так как все характеристики состояния конструктивных элементов и подсистем СФСС являются функциями длительности эксплуатации, то для таких сложных комплексов проблема времени приобретает исключительное значение [1–4].

Известно [5–8], что проблема времени является одной из самых сложных и парадоксальных с древнейших времен. Причем сложности касаются не только ее разрешения, но и самой постановки проблемы.

Рассогласованность представлений о времени принято объяснять принципиальным различием между подходами к ее рассмотрению – метафизическим, объединяющим натурфилософские, мифологические и художественные попытки понять сущность и природу времени, и научным (инструментальным), включающем математическое и естественнонаучное знание о свойствах и проявлении времени, его использовании и измерении. В настоящий момент проблема времени не только сохраняет свою остроту в науке (особенно в технике, медицине, экологии в связи с появлением сложных высокоопасных комплексов во многих сферах деятельности человека [5, 6]), но и тяготеет к разрешению в различного рода синтетических моделях, объединяющих научное и философское знание [7].

Постановка задачи

До последней трети XX в. исторически сложилось, что методологический подход к оценке остаточных ресурсов и сроков службы изделий СФСС основывался на достижениях теории прочности и долговечности, теории марковских процессов и постулатов Н. М. Седякина и К. Шеннона. Эти подходы для своего времени были достаточно обоснованными и использовались в нормативных документах по расчету показателей долговечности в различных отраслях техники [9].

Так, в частности, феноменология методов оценки ресурса, срока службы и остаточного ресурса оборудования сложных систем на основе чисто детерминированного подхода требует большого объема статистических данных реальной эксплуатации объектов, что часто трудно выполнить. Результаты подобных расчетов показателей долговечности даже при достаточно обширных статистических данных свидетельствуют о высокой степени осторожности в оценке полученных результатов [9].

Использование вероятностно-статистических методов по числу отказов объектов, несомненно, повышает достоверность получаемых результатов в решении задач оценивания показателей долговечности оборудования сложных систем длительного использования. Однако эти результаты также обладают значительной степенью неопределенности из-за введения понятий доверительных интервалов.

Сочетание детерминированных и вероятностно-статистических методов может повысить достоверность оценок остаточного ресурса и срока службы сложных высоко ответственных систем. Однако в силу отмеченных выше недостатков этих подходов их целесообразно применять только для ориентировочных расчетов [10, 11].

Для устранения приведенных недостатков необходим новый, более современный подход к оценке долговечности СФСС в модусах времени «прошлое–настоящее–будущее».

Математической базой такого подхода является теория операторов функционального анализа модели внутреннего времени изделий СФСС. Фундаментальной основой асимметрии времени служат неустойчивые и необратимые процессы. Для описания таких процессов исследователи используют операторы Лиувилля, Гамильтона, энтропии, внутреннего времени и функции Ляпунова.

Целью настоящей статьи является оценка роли оператора энтропии M в решении задач теории долговечности СФСС.

Основная часть

1. Сущность оператора энтропии

Классическая механика оперирует фундаментальным вторым уравнением И. Ньютона, устанавливающим зависимость между ускорением и силой F

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F, \quad (1)$$

в котором нет различия между прошлым и будущим: уравнение (1) инвариантно относительно обращения времени $t \rightarrow -t$, т.е. одинаково возможны и движения A «вперед» по времени, и движения B «назад» по времени.

Р. Клаузиус (1835 г.) рассматривал изолированные системы, не обменивающиеся с внешним миром ни энергией, ни веществом. Для таких систем им была введена функция S (энтропия), монотонно возрастающая до тех пор, пока не достигнет своего максимального значения в состоянии термодинамического равновесия:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0. \quad (2)$$

Однако оказалось, что выражение (2) справедливо и для систем, обменивающихся с внешним миром и веществом, и энергией.

Согласно второму началу термодинамики производство энтропии внутри системы положительно

$$dS = d_e S + d_i S, \quad d_i S \geq 0, \quad (3)$$

где $d_e S$ – определяет перенос энтропии через границы системы, а $d_i S$ – производство энтропии внутри системы. Вклад в производство энтропии внутри системы дают только необратимые процессы.

Таким образом, сутью второго начала термодинамики является утверждение: необратимые процессы (химические реакции, теплопроводность, диффузия и т.п.) приводят к односторонности времени. Или по-другому, положительное направление времени второе начало термодинамики связывает с возрастанием энтропии [8].

Далее рассмотрим систему, которая обменивается с внешним миром энергией, но не веществом, т.е. замкнутой системой.

Для замкнутой системы производство энтропии определяется теплом Q , получаемым от внешней среды

$$d_e S = dQ / T^0, \quad d_i S = 0, \quad (4)$$

где T^0 – абсолютная температура.

Если соотношение (4) объединить с первым началом термодинамики, то для замкнутой системы имеем

$$dE = dQ - pdV, \quad (5)$$

где E – энергия; p – давление; V – объем, т.е. энергия, которой система обменивается с внешним миром за небольшой промежуток времени dt , состоит из теплоты, полученной системой, и механической работы, произведенной над границей системы. Тогда полный дифференциал энтропии равен

$$dS = \frac{dE}{T^0} + p \frac{dV}{T^0}. \quad (6)$$

Дж. Гиббс обобщил формулу (6) на случай неоднородного по составу тела. Пусть $n_1, n_2, n_3, \dots$ – числа молей различных компонент. Тогда формула Гиббса для энтропии имеет вид

$$dS = \frac{dE}{T^0} + \frac{p}{T^0} dV - \sum \frac{\mu_\gamma}{T^0} dn_\gamma, \quad (7)$$

где μ_γ – химические потенциалы Дж. Гиббса, подробно описаны ниже.

Для случая линейной неравновесной термодинамики формула (6) допускает обобщение следующего вида:

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_j X_j J_j, \quad (8)$$

где J_j – скорости различных необратимых процессов (химических реакций, тепловых потоков, диффузии и т.д.), протекающих в системе; X_j – соответствующие обобщенные силы (градиенты температур, химических потенциалов и т.д.) (табл. 1, 2).

В работах [8, 10] доказано, что выражение (8) является основной формулой макроскопической термодинамики необратимых процессов.

2. Математические модели закономерностей необратимых физико-химических процессов на различных уровнях описания работоспособности элементов структурно и функционально сложных систем

Изучение закономерностей изменения свойств и состояний конструкционных материалов элементов СФСС целесообразно производить на трех уровнях: субмикроскопическом, микроскопическом и макроскопическом. Использование субмикроскопического уровня (строение атомов, молекул, кристаллических решеток) позволило получить представление о дислокациях в кристаллах, их взаимодействиях и движении, о диффузии атомов и электронном состоянии твердых тел и т.д. Эти сведения и легли в основу решения многих задач теории прочности конструкционных материалов [5].

На микроскопическом уровне рассматриваются процессы в небольших объемах (зерна, границы зерен, термические превращения). Макроскопический уровень связан с исследованиями распространения закономерностей, полученных на микроуровне, на весь объем твердого тела. Это потребовало разработки специальных методов инженерных расчетов, например, расчетов сложного напряженного состояния тел, износа, деформаций и т.п.

Основными физико-химическими процессами, которые в литературе по физике отказов считаются ответственными за изменение физических свойств материалов и, как следствие, за изменение функциональных характеристик элементов СФСС, являются следующие: диффузия, химические процессы, адсорбция, распад твердых растворов, изменение механических, электрических и магнитных свойств твердых тел. Эти процессы являются причиной более сложных деградиационных макропроцессов, которые проявляются при эксплуатации оборудования СФСС: коррозии, эрозии, радиационного охрупчивания, износа, теплового старения, высокоцикловой и малоцикловой усталости, ползучести, деформаций. Причем эти процессы развиваются под воздействием комплекса эксплуатационных факторов, таких как: динамические и статические механические нагрузки, термогидравлические и тепловые удары, взаимодействие теплоносителя с конструктивными элементами, перенос и осаждение продуктов коррозии, примесей и т.д.

В качестве примеров в табл. 1–2 приведены модели основных необратимых физико-химических процессов, приводящих в конечном итоге к утрате работоспособности оборудования применительно к ядерным энергетическим установкам атомных станций (ЯЭУ АС) [7]. В табл. 1 по-

казаны модели физико-химических процессов на субмикроскопическом уровне их изучения. Модели процессов, приводящих к отказам объектов на макроскопическом уровне, приведены в табл. 2.

Таблица 1

Модели физико-химических процессов на субмикроскопическом уровне

Физико-химический процесс	Модель процесса
Диффузия	$D(T^\circ) = D \exp\left(-\frac{E_a}{R_l T^\circ}\right)$
Химические реакции	$C = C_0 e^{-k_p T^\circ}, \quad k_p = k_{p0} \exp\left(-\frac{E_a}{R_l T^\circ}\right)$
Рекристаллизация твердого тела	$\frac{dx}{dt} = k^*(1-x) \exp\left(-\frac{E_a}{R_l T^\circ}\right)$
Распад твердых растворов	$\frac{C_1 - C_2}{C_3 - C_2} = \exp(-at^b)$
Фазовые превращения в твердых телах	$n = a_1 e^{-\frac{E_a}{R_l T^\circ}} e^{-\frac{a_2}{T^\circ} \frac{\gamma^3}{(\Delta T^\circ)}}$
Распад мартенситной структуры в закаленных сталях	$V = a_3 V_0 \left\{ 1 - \exp\left[-t e^{-\frac{E_a}{R_l T^\circ}}\right] \right\}$
Удельная электропроводность	$\sigma_\Sigma = \sigma_{\Sigma 0} \exp(-\alpha_{T^\circ} T^\circ)$
Удельная электропроводность диэлектриков	$\sigma_\Sigma = \sigma_{\Sigma 0} \exp(a_4 E)$
Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon_n = \epsilon_{n0} \exp(\alpha_{En} T^\circ)$
Напряженность электрического поля при тепловом пробое	$E_{кр} = E_{кр0} \exp(-\alpha_E T^\circ)$
Электрическая прочность	$E_{пр} = E_{пр0} - a_5 \sigma_M^h$

Таблица 2

Математические модели процессов, приводящих к отказам объектов на макроскопическом уровне

Наименование процесса	Модель процесса
1	2
Рост трещин в твердых телах	$\frac{dl}{dN} = A \Delta K_I^n, \quad \frac{dl}{dt} = C \Delta K_I^n;$ $b(t) = \exp\left[\ln b_{кр} - \frac{t}{\alpha} \left(\frac{\sigma_{ср}}{R_{p0,2} T^\circ}\right)^2\right]$
Деформация твердого тела под напряжением	$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \exp\left(-\frac{\Delta G}{R_l T^\circ}\right)$
Ползучесть	$\dot{\epsilon} = \alpha \exp\left(-\frac{E_a}{R_l T^\circ}\right)$
Начальная стадия ползучести	$\dot{\epsilon} = \beta t^m$
Изменение относительного удлинения	$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_M}{E_1} + \frac{\sigma_M}{E_2} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{\sigma_M}{\eta_r}$
Вязкость при запаздывающей упругой деформации	$\eta_l = A_l \exp\left(\frac{\Delta E_a}{R_l T^\circ}\right)$
Вязкость при течении материала	$\eta_2 = B \exp\left(\frac{\Delta E_a}{R_l T^\circ}\right)$

Окончание табл. 2

1	2
Старение полупроводниковых ферромагнитных материалов	$\Delta\mu(t) = \Delta\mu_{\max} \frac{1 - e^{-\omega t}}{1 - \omega e^{-\omega t}}$
Старение конденсаторов	$I_{\text{ут}}(t) = I_{\text{ут max}} [1 - \exp(-k_1 t^{n_1})]$
Старение терморезисторов	$\Delta R(t) = \Delta R_{\max} [1 - \exp(-k_1 t^{n_1})]$
Старение терморезисторов при одновременном протекании процессов диффузии примесей и химических реакций в рабочем материале	$\Delta R(t) = a + b \exp(-ct);$ $\Delta R(t) = a_1 - \frac{b_1}{(t + d)^{n_1}}$
Скорость коррозии	$\frac{dy}{dt} = C_0 k_p \exp(\alpha_1 T^\circ);$ $\frac{dy}{dt} = \gamma C_0 e^{\alpha_1 T^\circ} t^{\gamma-1}$
Скорость окисления циркониевых сплавов в водяном паре	$k_p = A_2 \exp\left(-\frac{E_a}{R_1 T^\circ}\right)$
Износ	$x(t) = a_2 (e^{k_2 t} - 1), \quad k_2 > 0;$ $x(t) = a_2 (1 - e^{k_2 t}), \quad k_2 < 0$
Износ при вращении (подшипники)	$\frac{dx}{dt} = a_3 \varepsilon_3 e^{a_3 t}, \quad a_3 = k_3 m \omega^3$

В табл. 1–2 приняты следующие обозначения: t – время; T° – абсолютная температура; D_0 – коэффициент диффузии при $T^\circ = 0^\circ\text{C}$; E_a – энергия активации; R_1 – универсальная газовая постоянная; C – концентрация вещества; k_p – константа скорости химической реакции; n – число центров кристаллизации; V – объем материала; γ – коэффициент поверхностного натяжения; σ_{j0} – удельная электрическая проводимость при $T^\circ = 0^\circ\text{C}$; $\alpha_{T^\circ}, \alpha_{\varepsilon_n}, \alpha_E$ – температурные коэффициенты; E – напряженность электрического поля; ε_{n0} – начальная диэлектрическая проницаемость при $T^\circ = 0^\circ\text{C}$; $E_{\text{кр}0}$ – напряженность электрического поля при пробое для $T^\circ = 0^\circ\text{C}$; σ_M – механическое напряжение; $E_{\text{пр}0}$ – напряженность электрического поля при пробое для $\sigma_M = 0$; $2l$ – длина трещины; N – число циклов нагружения; ΔK_1 – размах коэффициента интенсивности напряжений; $b_{\text{кр}}$ – критическая глубина трещины; $\sigma_{\text{ср}}$ – среднее напряжение; $R_{p0,2}^{T^\circ}$ – предел текучести; ε – деформация; E_1 – модуль упругости; E_2 – модуль упругости при запаздывающей упругой деформации; τ – постоянная времени; μ – магнитная проницаемость; $I_{\text{ут}}$ – ток утечки; ΔR – изменение сопротивления резистора; m – масса; ω – угловая скорость; ε_3 – начальный эксцентриситет; a_0 – радиус пятна касания; q_1 – заряд электрона; U – напряжение; E_{a0} – начальная энергия активации процесса разрушения; γ_1 – структурный коэффициент; k_1 – постоянная Больцмана; $a, b, c, d, \gamma, A, B, \alpha, \beta, k, n_1, u, \omega$ – константы.

Анализ приведенных в табл. 1–2 математических моделей позволяет сделать следующие выводы:

а) большинство физико-химических процессов, приводящих к отказам объектом ЯЭУ, может быть описано показательными функциями;

б) в качестве математических моделей для описания вида функции усталости объектов во времени целесообразно использовать зависимости

$$\phi(t) = e^{-kt}; \quad \phi(t) = ae^{bt}; \quad \phi(t) = a + be^{ct}; \quad \phi(t) = ae^{bt^c}; \quad \phi(t) = at^b e^{ct^d}; \quad (9)$$

в) для необратимых процессов утраты элементами СФСС работоспособности характерно одновременное действие химических, механических, тепловых, электрических, радиационных и дру-

гих процессов. Это приводит к сложным физико-химическим процессам изменения начальных свойств материалов элементов СФСС при эксплуатации. Например, интенсивность коррозионно-усталостного процесса разрушения металлов и сплавов выше сумм интенсивностей действия каждого фактора в отдельности. В этом случае простое сложение эффектов коррозии и механического разрушения отличается от суммарного эффекта одновременного их действия, т.е. сказывается эффект взаимодействия процессов.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая в данной статье проблема носит межотраслевой характер. Она чрезвычайно актуальна в авиационной и космической технике, транспорте, нефтяной, химической и газовой промышленности, металлургии, сельскохозяйственном машиностроении, тепловой энергетике и других отраслях народного хозяйства.

3. Связь оператора энтропии с функциями Ляпунова

Известно [8, 9], что для решения задач оценки односторонности (асимметрии) времени в теории долговечности СФСС необходимы оператор энтропии M второго начала термодинамики Клаузиуса (1835 г.), функции времени Ляпунова (1906 г.), а также методов современного функционального анализа и теории случайных процессов [9].

Выдающийся физик XIX в. Л. Больцман обосновал концепцию: необратимость есть проявление в макроскопическом масштабе «стохастичности», существующей в микроскопическом масштабе. Опираясь на эту концепцию, замечательный русский математик А. М. Ляпунов в своих исследованиях (1906 г.) предложил постулат, который формулируется следующим образом: *разбегание траекторий описывается функцией $\exp(t/\tau_c)$, где $1/\tau_c$ – для хаотических систем по определению положительная величина* [9]. Говоря языком конца XX–начала XXI в., этот постулат означает, что для поведения хаотических динамических систем понятие траектории утрачивает смысл через некоторое характерное время (время Ляпунова, рис. 1). Под хаосом будем понимать поведение системы, при котором первоначально близкие траектории экспоненциально разбегаются со временем. При этом режим называется хаотическим, если расстояние между любыми двумя точками первоначально сколь угодно малое экспоненциально возрастает со временем.

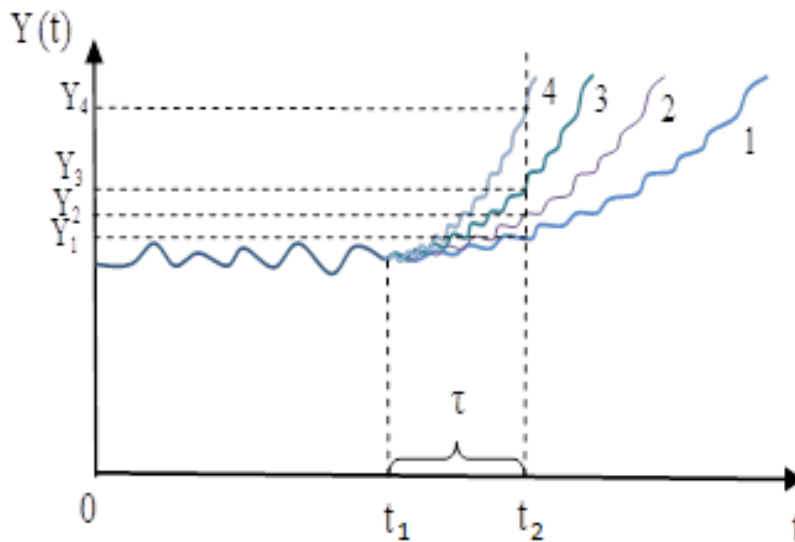


Рис. 1. Разбегание траекторий для хаотических систем $\tau = \tau_c$

3.1. Функции Ляпунова и второе начало термодинамики

Известно, что динамика описывает процессы, в которых направление времени несущественно (1). Совершенно понятно, что в других ситуациях именно направление времени имеет первостепенное значение. В п.1 показано: необратимые процессы (в частности, приведенные в табл. 1 и 2) приводят к односторонности времени или положительное направление времени второе начало термодинамики связывает с возрастанием энтропии, в основе которой преобладают необратимые процессы. Оно также постулирует существование функций с весьма специфическими свойствами, которые в изолированных системах могут возрастать со временем.

В главах 1, 4, 5 книги [8, с. 26–36, 85–122] И. Р. Пригожин приводит убедительные примеры процессов, приводящих к функциям Ляпунова. В частности, рассматривается система, эволюцию которой описывают переменные C_i – концентрации химических веществ. Эволюция во времени такой системы можно задать уравнениями скоростей реакций

$$\frac{dC_i}{dt} = F_i(\{C_i\}), \quad (10)$$

где F_i – суммарная скорость производства («наработки») компоненты C_i . Для каждой компоненты имеется свое уравнение.

Если предположить, что при $C_i = 0$ все скорости реакций обращаются в нуль, тогда точка $C_i = 0$ – точка равновесия рассматриваемой системы.

Что произойдет, если мы начнем с ненулевых значений концентраций C_i ? Будет ли наша система эволюционировать к точке равновесия $C_i = 0$? Если воспользоваться современной терминологией, то тот же вопрос можно сформулировать иначе: является ли состояние $C_i = 0$ аттрактором? Функции Ляпунова позволяют нам ответить на этот вопрос. Пусть функция концентраций $Y = Y(C_1, \dots, C_n)$ положительна во всем интересующем нас диапазоне концентраций и обращается в нуль при $C_i = 0$. В общем случае функция Ляпунова может быть и отрицательно определенной, но ее первая производная должна быть положительно определенной.

Рассмотрим, как изменяется $Y(C_1, \dots, C_n)$ при изменении концентраций C_i . Но эволюцию концентраций C_i со временем описывают уравнения (8), поэтому производную функции Y по времени можно представить в виде

$$\frac{dY}{dt} = \sum_i \frac{\partial Y}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} = \sum_i \frac{\partial Y}{\partial C_i} F_i(\{C_i\}). \quad (11)$$

Теорема Ляпунова утверждает, что состояние равновесия является аттрактором, если производная dY/dt функции Y по времени имеет знак, противоположный знаку функции Y (в нашем примере производная dY/dt должна быть отрицательной).

Геометрический смысл этого условия очевиден (рис. 2). Второе начало термодинамики позволяет утверждать, что для изолированных систем функция Ляпунова существует и термодинамическое равновесие является аттрактором для неравновесных состояний. Это важное обстоятельство можно проиллюстрировать на примере одной простой задачи, связанной с теплопроводностью. Изменение температуры T^0 со временем описывается классическим уравнением Фурье

$$\frac{\partial T^0}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T^0}{\partial c^2}, \quad (12)$$

где κ – теплопроводность ($\kappa > 0$). Функция Ляпунова для этой задачи вычисляется без труда. В качестве нее можно взять, например, функцию

$$\Theta(T^0) = \int \left(\frac{\partial T^0}{\partial c} \right)^2 dc. \quad (13)$$

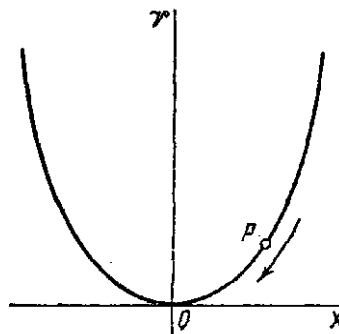


Рис. 2. Понятие асимптотической устойчивости: если возмущение вынуждает систему перейти в точку P , то система, эволюционируя в ответ, возвращается в положение равновесия – точку O

Нетрудно проверить, что при определенным образом заданных граничных условиях

$$\frac{d\Theta}{dt} = -2\kappa \int \left(\frac{\partial^2 T^0}{\partial c^2} \right)^2 dc \leq 0 \quad (14)$$

и что функция Ляпунова $\Theta(T)$ действительно убывает до своего минимального значения, когда достигается тепловое равновесие. В то же время равномерное распределение температуры является аттрактором для начальных неоднородных распределений температуры [8].

3.2. *Функции Ляпунова в теории термодинамической устойчивости систем.* В п. 3.1 рассмотрены случаи состояния систем, близких к равновесию. Для систем, состояния которых далеки от равновесия, необходима еще одна функция Ляпунова. «Как известно, состояния равновесия изолированных систем устойчивы, если соответствуют максимуму производства энтропии. Подействовав возмущением на систему, находящуюся вблизи равновесного значения $S_{\text{равн}}$, получим

$$S = S_{\text{равн}} + \delta S + \frac{1}{2} \delta^2 S. \quad (15)$$

Но $S_{\text{равн}}$ – максимальное значение функции S , поэтому член первого порядка δS обращается в нуль, и, следовательно, устойчивость определяется знаком члена второго порядка $\delta^2 S$.

Элементарная термодинамика позволяет вычислить это важное выражение в явном виде. Рассмотрим сначала возмущение одной независимой переменной – энергии E .

В этом случае $\delta S = \delta E / T$ и

$$\delta^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} (\delta E)^2 = \frac{\partial(1/T)}{\partial E} (\delta E)^2 = -c_v \frac{(\delta T)^2}{T^2} < 0 \quad (16)$$

(мы воспользовались здесь тем, что удельная теплопроводность при постоянном объеме определяется, как приведено ниже, и положительна):

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_v. \quad (17)$$

Обобщая, можно сказать, что, подвергнув все переменные в (7) возмущениям, мы получим квадратичную форму. Приведем лишь результат вычислений (сами вычисления можно найти в [12]):

$$T \delta^2 S = - \left[\frac{c_v}{T} (\delta T)^2 + \frac{\rho}{X} (\delta v)_{N_j}^2 + \sum_{j,j'} \mu_{jj'} \delta N_j \delta N_{j'} \right] < 0, \quad (18)$$

где ρ – плотность, $v = 1/\rho$ – удельный объем (индекс N_j означает, что при вариации N_j состав остается постоянным), X – изотермическая сжимаемость, N_j – мольная доля компоненты j и

$$\mu_{jj'} = \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial N_{j'}} \right)_{p,T}. \quad (19)$$

Основные условия устойчивости классической термодинамики подразделяются на следующие:

$$c_v > 0 \text{ (тепловая устойчивость)}, \quad (20)$$

$$X > 0 \text{ (механическая устойчивость)}, \quad (21)$$

$$\sum_{j,j'} \mu_{jj'} \delta N_j \delta N_{j'} > 0 \text{ (устойчивость относительно диффузии)}. \quad (22)$$

Каждое из этих условий имеет простой физический смысл. Например, если бы нарушилось условие (20), то уравнение Фурье приводило бы не к затуханию, а к усилению небольших флуктуаций температуры.

Если условия (20)–(22) выполнены, то $\delta^2 S$ – отрицательно определенная величина. Кроме того, можно показать, что производная от $\delta^2 S$ по времени связана с производством энтропии P соотношением

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S = \sum_p J_p X_p = P \geq 0, \quad (23)$$

где

$$P \equiv \frac{d_i S}{dt} \geq 0. \quad (24)$$

Из неравенств (18) и (23) следует, что $\delta^2 S$ – функция Ляпунова, и ее существование обеспечивает затухание всех флуктуаций. Именно поэтому для больших систем, находящихся вблизи равновесия, достаточно макроскопического описания. Флуктуации играют второстепенную роль: они являются как пренебрежимо малые поправки к законам для больших систем...

...Неравенство (18) остается в силе во всех областях применимости макроскопического описания. Однако производная от $\delta^2 S$ по времени оказывается связанной не с полным производством энтропии, как в неравенстве (23), а с производством энтропии, вызванным возмущением, и в этом случае

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S = \sum_p \delta J_p \delta X_p. \quad (25)$$

Величину в правой части можно назвать избытком производства энтропии. Подчеркнем еще раз, что δJ_p и δX_p – отклонения от значений J_p и X_p в стационарном состоянии, устойчивость которого мы проверяем с помощью возмущения...

...Если при всех $t \geq t_0$, где t_0 может быть началом возмущения, выполняется неравенство

$$\sum_p \delta J_p \delta X_p \geq 0, \quad (26)$$

то $\delta^2 S$ – функция Ляпунова, и устойчивость обеспечена» [8, с. 96–97].

Далее в работе [8, с. 151–152] предлагается использовать другой подход к выбору вида функции Ляпунова, который содержал бы не только вероятности, но и учитывал бы корреляции между элементами, как это сделано в работах по квантовой механике. При этом постулируется следующее:

$$\Omega = \int \rho^2 dp dq > 0, \quad (27)$$

где интегрирование проводится по фазовому пространству. В квантовой механике эквивалентная величина имела бы следующий вид:

$$\begin{aligned} \Omega = \text{tr} \rho^\dagger \rho &= \sum_{n, n'} \langle n | \rho | n \rangle^\dagger \langle n' | \rho | n \rangle = \sum_n |\langle n | \rho | n \rangle|^2 + \sum_{n \neq n'} |\langle n | \rho | n' \rangle|^2 = \\ &= \Sigma(\text{диагональные члены})^2 + \Sigma(\text{внедиагональные члены})^2, \end{aligned} \quad (28)$$

причем

$$\text{tr} \rho = \sum_n \langle n | \rho | n \rangle = 1. \quad (29)$$

Однако недостатком функций (27) и (28) является отсутствие зависимости от времени. Поэтому в работе [8, с.154] в качестве функции Ляпунова предлагается величина Ω более общего вида

$$\Omega = \int \rho(t) M \rho(t) dp dq \geq 0, \quad (30)$$

где

$$M \geq 0. \quad (31)$$

Принимая (30) за функцию Ляпунова, мы предполагаем, что производная от M по времени D отрицательна (или равна нулю):

$$dM / dt = D \leq 0. \quad (32)$$

Преобразуем (32) к виду

$$\frac{dM}{dt} \equiv iLM. \quad (33)$$

Теперь уже нетрудно показать, что условие (32) может быть удовлетворено только в том случае, если $D = 0$ всюду, но тогда Ω – не функция Ляпунова, если M зависит от координат и импульсов.

Итак, приходим к выводу: микроскопическая энтропия (или функционал Ляпунова) не может быть обычной функцией фазовых переменных. Если она вообще существует, то должна быть оператором, т.е. «это наводит на мысль рассмотреть функционал Ляпунова вида (30), но с величиной M , определяемой как оператор микроскопической энтропии, *не коммутирующий* с оператором Лиувилля L . Коммутатор

$$-i(LM - ML) = D \leq 0 \quad (34)$$

в этом случае задает «производство микроскопической энтропии». Но такой подход приводит к новой форме дополнителности...

...Каков смысл оператора M ? Прежде всего, M означает, что существуют дополнительные свойства, *не включаемые* в динамическое описание. Даже если нам известны собственные функции и собственные значения оператора L , мы не можем приписать M вполне определенное значение. Такие свойства дополнителности могут проистекать только из того или иного типа стохастичности движения... Точный смысл сказанному придаст более тонкая классификация систем на «внутренне случайные», допускающие отображение на цепь Маркова, и «внутренне необратимые», приводящие к внутреннему различию между прошлым и будущим... Можно пойти еще дальше и сопоставить системе новый тип времени – оператор времени T , тесно связанный с оператором M . Так как T – оператор, он имеет собственные значения, каждое из которых задает возможный возраст системы. Любое заданное начальное распределение p обычно может быть разложено в сумму членов, различных по возрасту и типу эволюции» [8, с. 156–158].

4. Предложения к методике последовательности расчетов показателей долговечности с учетом роли оператора энтропии M и функций Ляпунова

Исходя из материала статьи, изложенного в пунктах 1–3, можно резюмировать следующую обобщенную методику анализа оператора энтропии M , показанную в табл. 3.

Таблица 3

Методика расчетов показателей долговечности с учетом оператора энтропии M и функций Ляпунова

1	Постановка задачи
2	Выбор вида необратимых процессов, протекающих в элементах, подсистемах и системе в целом
3	Характеристики изменения показателей необратимых процессов во времени
4	Макроскопические уравнения связи параметров необратимых процессов и показателей долговечности
5	Выбор вида и параметров функций Ляпунова
6	Статистические модели необратимых процессов изделий систем
7	Определение собственных функций и собственных значений операторов M и функций Ляпунова
8	Определение влияния параметров собственных функций и собственных значений на эволюцию возраста изделий системы
9	Расчет ресурса, срока службы и их остаточных значений в модусах времени «прошлое–настоящее–будущее»
10	Рекомендации по выработке ресурса и срок службы в процессе применения системы

Заключение

1. Показано, что для решения задач оценки времени в модусах «прошлое–настоящее–будущее» в теории долговечности СФСС необходим комплексный подход с учетом оператора энтропии M , функций времени Ляпунова, методов и моделей современного функционального анализа и теории случайных процессов.

2. Так как изменчивость скорости времени описывается моделями макроскопической термодинамики необратимых процессов, в статье детально описаны основные математические модели не-

обратимых физико-химических процессов, приводящих к утрате работоспособности оборудования СФСС, на примере изделий ядерных энергетических установок.

3. Показано, что большинство необратимых физико-химических процессов в оборудовании СФСС описывается моделями показательных функций различной сложности.

4. Доказано, что для необратимых процессов динамических систем характерно хаотическое разбегание траекторий, которое описывается функцией $\exp(t/\tau_c)$, где $1/\tau_c$ – для хаотических систем по определению положительная величина. Такой режим носит название хаотического. При этом под хаосом понимается такое поведение системы, при котором первоначально сколь угодно близкие траектории экспоненциально разбегаются со временем. Для хаотических динамических систем понятие траектории утрачивает смысл через некоторое время τ_c – время Ляпунова.

5. Показано, что необратимые процессы в соответствии со вторым началом термодинамики имеют положительное возрастание энтропии и одностороннее направление времени.

6. Микроскопическая энтропия (или функционал Ляпунова) не может быть обычной функцией фазовых переменных, а должна быть оператором. Поэтому оператор энтропии M имеет дополнительные свойства и характерен для так называемых «внутренне случайных» систем, допускающих отображение на цепь Маркова, и «внутренне необратимых», приводящих к внутреннему различию между прошлым и будущим.

7. Предложена в первом варианте методика последовательности расчетов показателей долговечности с учетом роли оператора M и функций Ляпунова.

8. Существуют устойчивые предположения, что оператор энтропии M тесно связан с оператором внутреннего времени T , который имеет собственные значения, каждое из которых задает возможный возраст системы (т.е. ресурс, срок службы и их остаточные значения как показатели долговечности).

Библиографический список

1. Клячкин, В. Н. Статистические методы оценки стабильности функционирования технических систем / В. Н. Клячкин, И. Н. Карпунина // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 2 (22). – С. 36–42.
2. Михайлов, В. С. Оценка вероятности безотказной работы по результатам испытаний, не давших отказы / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2017. – № 2 (18). – С. 56–60. – DOI 10.21685/2307-4205-2017-2-8.
3. Литвиненко, Р. С. Анализ использования показательного распределения в теории надежности технических систем / Р. С. Литвиненко, Р. Г. Идиятуллин, А. Э. Аухадеев // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 2 (14). – С. 17–22.
4. Садыхов, Г. С. Интерполяция оценки вероятности безотказного срабатывания объекта при высоких уровнях безотказности / Г. С. Садыхов, А. А. Артюхов // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 1 (13). – С. 15–19.
5. Острейковский, В. А. Математическое моделирование эффекта асимметрии внутреннего времени в теории долговечности структурно и функционально сложных критически важных систем / В. А. Острейковский, Е. Н. Шевченко // Итоги науки. Выпуск 37. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. – Москва : РАН, 2018. – С. 69–111.
6. Острейковский, В. А. Старение и прогнозирование ресурса оборудования атомных станций / В. А. Острейковский. – Москва : Энергоатомиздат, 1994. – 288 с.
7. Антонов, А. В. Ресурс и срок службы оборудования энергоблоков атомных станций (на примере энергоблоков Смоленской АЭС) / А. В. Антонов, В. А. Острейковский. – Москва : Инновационное машиностроение, 2017. – 536 с.
8. Пригожин, И. От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках / И. Пригожин ; под ред. Ю. Л. Климонтовича. – Изд. 2-е, доп. – Москва : Едиториал УРСС, 2002. – 288 с.
9. Острейковский, В. А. Феномен асимметрии времени в теории неустойчивых и необратимых процессов сложных динамических систем : монография / В. А. Острейковский. – Сургут : Печатный мир, 2017. – 268 с. – (Сер. «25 лет СурГУ»)
10. Денисова, Т. Ю. Онтология феномена времени в теории прогнозирования техногенного риска сложных динамических систем : монография / Т. Ю. Денисова, В. А. Острейковский. – Сургут : Печатный мир, 2017. – 253 с. – (Сер. «25 лет СурГУ»)
11. Ляпунов, А. М. Собр. сочинений / А. М. Ляпунов. – Москва ; Ленинград, 1956. – Т. 2. – 263 с.
12. Гленсдорф, П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций / П. Гленсдорф, И. Пригожин. – Москва : Мир, 1973. – 280 с.

13. Муравьев, И. И. Модели оценки фактора времени в теории техногенного риска динамических систем / И. И. Муравьев, В. А. Острейковский, Е. Н. Шевченко // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. – 2015. – Т. I. – С. 24–27.
14. Острейковский, В. А. Феномен «время» в теории прогнозирования техногенного риска сложных динамических систем / В. А. Острейковский, Е. Н. Шевченко // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 4. – С. 3–12.

References

1. Klyachkin V. N., Karpunina I. N. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2018, no. 2 (22), pp. 36–42. [In Russian]
2. Mikhaylov V. S. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2017, no. 2 (18), pp. 56–60. DOI 10.21685/2307-4205-2017-2-8. [In Russian]
3. Litvinenko R. S., Idiyatullin R. G., Aukhadeev A. E. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2016, no. 2 (14), pp. 17–22. [In Russian]
4. Sadykhov G. S., Artyukhov A. A. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2016, no. 1 (13), pp. 15–19. [In Russian]
5. Ostreykovskiy V. A., Shevchenko E. N. *Itogi nauki. Vypusk 37. Izbrannye trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma po fundamental'nyim i prikladnym problemam nauki* [Results of science. Issue 37. Selected proceedings of the International Symposium on fundamental and applied problems of science]. Moscow: RAN, 2018, pp. 69–111. [In Russian]
6. Ostreykovskiy V. A. *Starenie i prognozirovaniye resursa oborudovaniya atomnykh stantsiy* [Aging and forecasting of equipment life of nuclear power plants]. Moscow: Energoatomizdat, 1994, 288 p. [In Russian]
7. Antonov A. V., Ostreykovskiy V. A. *Resurs i srok sluzhby oborudovaniya energoblokov atomnykh stantsiy (na primere energoblokov Smolenskoj AES)* [Resource and service life of nuclear power plant units equipment (on the example of Smolensk NPP units)]. Moscow: Innovatsionnoe mashinostroenie, 2017, 536 p. [In Russian]
8. Prigozhin I. *Ot sushchestvuyushchego k voznikayushchemu: vremya i slozhnost' v fizicheskikh naukakh* [From existing to emerging: time and complexity in the physical Sciences]. 2nd ed, suppl. Moscow: Editorial URSS, 2002, 288 p. [In Russian]
9. Ostreykovskiy V. A. *Fenomen asimmetrii vremeni v teorii neustoychivykh i neobratimyykh protsessov slozhnykh dinamicheskikh sistem: monografiya* [The phenomenon of time asymmetry in the theory of unstable and irreversible processes of complex dynamic systems: monograph]. Surgut: Pechatnyy mir, 2017, 268 p. [In Russian]
10. Denisova T. Yu., Ostreykovskiy V. A. *Ontologiya fenomena vremeni v teorii prognozirovaniya tekhnogennogo riska slozhnykh dinamicheskikh sistem: monografiya* [Ontology of time phenomenon in the theory of technogenic risk prediction of complex dynamic systems: monograph]. Surgut: Pechatnyy mir, 2017, 253 p. [In Russian]
11. Lyapunov A. M. *Sobr. sochineniy* [Coll. compositions]. Moscow; Leningrad, 1956, vol. 2, 263 p. [In Russian]
12. Glensdorf P., Prigozhin I. *Termodinamicheskaya teoriya struktury, ustoychivosti i fluktuatsiy* [Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations]. Moscow: Mir, 1973, 280 p. [In Russian]
13. Murav'ev I. I., Ostreykovskiy V. A., Shevchenko E. N. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo* [Proceedings of the International Symposium Reliability and Quality]. 2015, vol. I, pp. 24–27. [In Russian]
14. Ostreykovskiy V. A., Shevchenko E. N. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2016, no. 4, pp. 3–12. [In Russian]

Острейковский Владислав Алексеевич

доктор технических наук, профессор,
кафедра информатики и вычислительной техники,
Сургутский государственный университет
(628412, Россия, г. Сургут, проспект Ленина, 1)
E-mail: ostreykovsky_va@surgu.ru

Шевченко Елена Николаевна

кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра информатики и вычислительной техники,
Сургутский государственный университет
(628412, Россия, г. Сургут, проспект Ленина, 1)
E-mail: elenan_27@mail.ru

Ostreykovsky Vladislav Alekseevich

doctor of technical sciences, professor,
sub-department of informatics and computer science,
Surgut State University
(628412, 1 Lenin avenue, Surgut, Russia)

Shevchenko Elena Nikolaevna

candidate of physical and mathematical sciences,
associate professor,
sub-department of informatics and computer science,
Surgut State University
(628412, 1 Lenin avenue, Surgut, Russia)

Образец цитирования:

Острейковский, В. А. О роли оператора энтропии при оценке и анализе показателей долговечности сложных технических динамических систем / В. А. Острейковский, Е. Н. Шевченко // Надежность и качество сложных систем. – 2019. – № 3 (27). – С. 3–16. – DOI 10.21685/2307-4205-2019-3-1.